

مسائل برای حل

هوشنگ شرقی
محمد رضا امیری



۲. شعاع قاعده یک مخروط مساوی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن مساوی ۸ سانتی‌متر است. اگر این مخروط را توسط صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصله ۴ سانتی‌متر از آن برش دهیم، حجم فضای محدود به این صفحه و قاعده مخروط را به دست آورید.

۳. متوازی‌الاضلاعی به اضلاع ۸ و ۴ سانتی‌متر را که یک زاویه حاده آن 30° است، حول ضلع بزرگ آن دوران می‌دهیم. حجم حادث شده را به دست آورید.

۲

هندسه

۱. ثابت کنید تبدیل $T(x,y)=(2\alpha-x, 2\beta-y)$ بازتاب نسبت به یک نقطه است. سپس معادله بازتاب خط $2x-y=4$ را نسبت به نقطه $M(1,2)$ به دست آورید.

۲. خط به معادله $2y+x=2$ را تحت تجانس با ضریب $k=2$ تبدیل کنید. سپس نمودار حاصل را به اندازه 90° حول مبدأ دوران دهید. معادله تصویر را به دست آورید.

۳. به کمک تبدیل‌های هندسی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث مساوی 180° است.

حسابان

۱. حدهای زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 2x}{\tan^3 x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan 3x}{\sin x - \cos x}$$

۲. a و b را طوری بیابید که تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin \pi x}{x-1} + b & x > 1 \\ \sin \frac{\pi x}{6} + \cos \frac{\pi x}{2} & x = 1 \\ a\pi[\pi x] + b[-x] & x < 1 \end{cases}$$

۳. a و b را طوری بیابید که خط $y=2x+1$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی تابع $f(x)=a\sqrt{x}+b$ (ضابطه) مماس باشد.

۲

ریاضی

۱. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ ، $AB = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ و $AC = 2\sqrt{6}$ (مطلوب است: الف) طول BC ، ب) اندازه \hat{B} ، ج) مساحت مثلث

۲. اگر داشته باشیم: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A^2 - B^2$ را به دست آورید.

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس مجهول x را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$A^2 + AX = A + X$$

۱

هندسه

۱. حجم و مساحت کل هرمی را به دست آورید که قاعده آن شش ضلعی منتظمی به ضلع a باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق b باشند ($b > a$).

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. ثابت کنید در هر تابع چندجمله‌ای درجه ۳، نقطه عطف، وسط نقاط ماکزیم و مینی‌مم است.

۲. یک نقطه نورانی روی دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، از نقطه $(\sqrt{3}, 1)$ در ناحیه اول شروع به حرکت می‌کند تا به نقطه $(0, 2)$ برسد. در همان حال، مانعی به شکل پاره‌خط عمود بر محور x ها در نقطه $(4, 0)$ و به ارتفاع یک واحد، سایه‌ای روی محور x ها ایجاد می‌کند. اگر مختص x نقطه نورانی با سرعت $0/1$ واحد بر ثانیه افزایش یابد، سرعت کاهش طول سایه را به دست آورید.

۳. اولاً جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ را رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید این نمودار سه نقطه عطف بر یک استقامت دارد.

۲. سه خودروی a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال پیروزی b دو برابر پیروزی c است.

(الف) مطلوب است احتمال پیروزی هر کدام از ماشین‌ها؛
(ب) مطلوب است احتمال اینکه a یا b ببرند؛

۳. دو قطعه چوب به طول‌های 1 و $0/5$ متر داریم. قطعه بزرگ‌تر را با اره به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (حال سه قطعه چوب خواهیم داشت). احتمال اینکه این سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چه قدر است؟

ریاضی سوم تجربی

۱. مطلوب است محاسبه هر یک از حدهای زیر:

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 2x - 1}{7x^2 + x - 4}$

۲. اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & x < 1 \\ bx - 1 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۳. به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \geq a \\ x & x < a \end{cases}$ روی همه نقاط R پیوسته است؟

۱۱. به جای علامت سؤال چه عددی قرار می‌گیرد؟

تقریح اندیشه!

ریاضیات گسسته

۱. سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهره سفید و ۹ مهره سیاه است و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چه قدر است؟

۲. در پارکینگی سه خودروی تولیدی ۹۴ و چهار خودروی تولیدی ۹۳ وجود دارد. در پارکینگ دیگری پنج خودروی تولیدی ۹۴ و سه خودروی تولیدی ۹۳ وجود دارد. اگر راننده‌ای یکی از این دو پارکینگ را به تصادف انتخاب و یک خودرو برای مسابقه از آن خارج کند و مشاهده شود که خودروی انتخاب شده تولیدی ۹۳ است، چه قدر احتمال دارد این خودرو از پارکینگ اول باشد؟

۳. (الف) قانون احتمال کل را بیان کنید.

(ب) بگویید دو پیشامد ناسازگار چه زمانی مستقل هستند.

(ج) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A را بیان کنید.

جبر و احتمال

۱. تاس سالمی را n بار می‌اندازیم. احتمال اینکه m بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد، چیست؟ احتمال اینکه 2 بار تاس یک عدد زوج بیاید، چه قدر است؟